УДК 517.51

Л.Г.Бойцун, С.В. Кочерга
Дніпропетровський національний університет

АБСОЛЮТНЕ ПІДСУМОВУВАННЯ МЕТОДОМ Г.Ф. ВОРОНОГО ІНТЕГРАЛІВ ФУР'Є З МНОЖНИКОМ

Наведена теорема, що пов'язана з функціональним методом Г.Ф.Вороного. Встановлені достатні умови, які накладені на функцію, що породжує метод підсумовування Г.Ф.Вороного, на функцію-множник та на функцию $f(t)$, при яких інтеграл Фур'э цієї функції з множником абсолютно підсумовується функціональним методом Г.Ф.Вороного.

Нехай функція $f(u)$ інтегрована на кожному скінченому проміжку, $S(t)=\int_0^t f(u)du$. Функціональний метод підсумовування Г.Ф.Вороного інтеграла $\int_0^\infty f(u)du$ визначається наступним чином. Нехай дана інтегрована на кожному скінченому проміжку функція $p(t)$ і $P(y)=\int_0^y p(t)dt$. Якщо

$$\lim_{y\to\infty}\tau(y)=\lim_{y\to\infty}\frac{1}{P(y)}\int_0^y P(y-u)f(u)du=\lim_{y\to\infty}\frac{1}{P(y)}\int_0^y p(y-u)S(u)du=I,$$

то кажуть, що інтеграл $\int_0^\infty f(u)du$ підсумовується методом Г.Ф. Вороного до I або скорочено $(W,p(y))$ – підсумовуємо до I [1], і абсолютно підсумовується $(W,p(y))$, або підсумовується $|W,p(y)|$, якщо $\int_0^\infty |\tau'(y)|dy\le K$.

Якщо $p(t)=\alpha t^{\alpha-1}$, $\alpha>0$, метод підсумовування Г.Ф. Вороного перетворюється у відомий метод підсумовування Чезаро додатного порядку.

Інтеграл Фур'є функції $f(t)\in L(-\infty;\infty)$, згідно [2], має вигляд

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty du\int_{-\infty}^\infty f(t)\cos u(t-x)dt.$$

Доводиться наступна теорема.

Теорема. *Нехай додатна функція $\lambda(y)$ неперервно диференційована така, що $\lambda'(y)\le 0$,*

$$\int_0^\infty \frac{\lambda(y)}{y+1}dy<\infty,\qquad \int_0^\infty \frac{\lambda(y)\ln(1+y)}{y}dy<\infty,$$

і нехай $p(y)$ додатна, монотонно зростаюча функція така, що

$$\frac{p(y)}{P(y)}=O\left(\frac{1}{y}\right),\qquad \left(\frac{P(y)}{p(y)}\right)'=O(1).$$

Тоді, якщо $\int_0^t \frac{1}{2}\left|f(x+u)+f(x-u)\right|du = o(t),\ t\to 0,$ *то* $\int_0^\infty \lambda(y)A(y,x)dy$ *підсумовується* $\left|W,p(y)\right|$.

Для доведення теореми нам потрібні леми.

Лема 1. *Нехай* $\tau(y)=\frac{1}{P(y)}\int_0^y P(y-u)f(u)du.$

Тоді

$$\frac{1}{P(y)}\int_0^y p(y-u)\left[\frac{P(y)}{p(y)}-\frac{P(y-u)}{p(y-u)}\right]f(u)du=\frac{P(y)}{p(y)}\tau'(y).$$

Доведення. Дійсно,

$$\tau'(y)=-\frac{p(y)}{P^2(y)}\int_0^y P(y-u)f(u)du+\frac{1}{P(y)}\int_0^y p(y-u)f(u)du=$$

$$=\frac{1}{P^2(y)}\int_0^y\left[P(y)p(y-u)-P(y-u)p(y)\right]f(u)du,$$

звідки

$$\frac{P(y)}{p(y)}\tau'(y)=\frac{1}{P(y)p(y)}\int_0^y\left[P(y)p(y-u)-P(y-u)p(y)\right]f(u)du=$$

$$=\frac{1}{P(y)}\int_0^y\left[\frac{P(y)p(y-u)}{p(y)}-P(y-u)\right]f(u)du=$$

$$=\frac{1}{P(y)}\int_0^y p(y-u)\left[\frac{P(y)}{p(y)}-\frac{P(y-u)}{p(y-u)}\right]f(u)du.$$

Лема 2. *Нехай* $0<t$ *і* $S(y,t)=\int_0^y p(y-u)\left[\frac{P(y)}{p(y)}-\frac{P(y-u)}{p(y-u)}\right]\cos utdu.$

Тоді

$$S(y,t)=\begin{cases}O\left(yP(y)\right), & \text{для } 0<t\le\frac{1}{y},\\ O\left(\frac{yp(y)}{t}\right), & \text{для } \frac{1}{y}<t\end{cases}$$

Доведення. Для $0<t\le\frac{1}{y}$

$$\left|S(y,t)\right|\le\int_0^y p(y-u)\left|\frac{P(y)}{p(y)}-\frac{P(y-u)}{p(y-u)}\right|du\le$$

$$\le\frac{P(y)}{p(y)}\int_0^y p(y-u)du+\int_0^y P(y-u)du=$$

$$=\frac{P^2(y)}{p(y)}+\int_0^y P(u)du\le\frac{P^2(y)}{p(y)}+yP(y)\le 2yP(y).$$

Нехай $t>\frac{1}{y}$. Інтегруючи частинами, маємо

$$S(y,t)=\left\{\begin{matrix} p(y-u)\cos ut = dv & v=\int_0^u p(y-z)\cos ztdz \\ \frac{P(y)}{p(y)}-\frac{P(y-u)}{p(y-u)}=u & du=-\left(\frac{P(y-u)}{p(y-u)}\right)' du \end{matrix}\right\}=$$

$$=\left[\frac{P(y)}{p(y)}-\frac{P(y-u)}{p(y-u)}\right]\int_0^u p(y-z)\cos ztdz\Bigg|_0^y +$$

$$+\int_0^y\left(\frac{P(y-u)}{p(y-u)}\right)' du\int_0^u p(y-z)\cos ztdz=$$

$$=\frac{P(y)}{p(y)}\int_0^u p(y-z)\cos ztdz+\int_0^y\left(\frac{P(y-u)}{p(y-u)}\right)' du\, p(y)\int_0^\lambda \cos ztdz=$$

$$=\frac{P(y)}{p(y)}p(y)\int_0^v \cos ztdz+\int_0^y\left(\frac{P(y-u)}{p(y-u)}\right)' p(y)\frac{\sin\lambda t}{t}du=$$

$$=\frac{P(y)\sin vtp(y)}{p(y)t}+O\left(\frac{yp(y)}{t}\right)=O\left(\frac{yp(y)}{t}\right),$$

$0\le\lambda\le u,\ 0\le v\le y$ за теоремою про середнє значення і того, що $\frac{P(y)}{yp(y)}\le 1.$

Лема 3. *Нехай*

$$S(y,v,t)=\int_0^v p(y-z)\left(\frac{P(y)}{p(y)}-\frac{P(y-z)}{p(y-z)}\right)\cos ztdz.$$

Тоді

$$S(y,v,t)=\begin{cases} O\left(v^2p(y)\right), \text{ для } 0<t\le\frac{1}{y}, \\ O\left(\frac{vp(y)}{t}\right), \text{ для } t>\frac{1}{y}. \end{cases}$$

Доведення. Інтегруючи частинами, отримаємо для $0<t\le\frac{1}{y}$

$$S(y,v,t)=\left[\frac{P(y)}{p(y)}-\frac{P(y-v)}{p(y-v)}\right]_0^v\int p(y-u)\cos utdu\ +$$

$$+\int_0^v\left(\frac{P(y-z)}{p(y-z)}\right)' dz\int_0^z p(y-u)\cos utdu=\left(\frac{P(y-z)}{p(y-z)}\right)'_{u=\xi}\int_0^\eta \cos utdu+$$

$$+\int_0^v\left(\frac{P(y-z)}{p(y-z)}\right)' dzp(y)\int_0^{\eta_1}\cos utdu=$$

$$=O(1)O\left(\frac{\nu p(y)\sin\eta t}{t}\right)+\left(\int_0^{\nu}p(y)dz\left|\int_0^{\eta_1}\cos utdu\right|\right)=$$

$$=O\left(\nu^2p(y)\right)+O\left(p(y)\int_0^{\nu}zdz\right)=O\left(\nu^2p(y)\right),$$

де $y-u\le\xi\le y$, $0\le\eta\le\nu$, $0\le\eta_1\le z\le\nu$.

Далі для $t>\frac{1}{y}$:

$$S(y,\nu,t)=O\left(\frac{\nu p(y)}{t}\right)+O\left(\int_0^{\nu}p(y)\frac{|\sin\eta_1 t|}{t}dt\right)=O\left(\frac{\nu p(y)}{t}\right).$$

Лема 4. *Нехай*

$$K(y,t)=\frac{1}{P(y)}\int_0^{y}p(y-z)\left[\frac{P(y)}{p(y)}-\frac{P(y-z)}{p(y-z)}\right]\lambda(z)\cos ztdz\ .$$

Тоді

$$K(y,t)=\begin{cases}O\left(\frac{p(y)}{P(y)}\int_0^{y}z^2\left(-\lambda'(z)\right)dz\right)+O\left(y\lambda(y)\right), & \text{для}\quad 0<t\le\frac{1}{y},\\ O\left(\frac{p(y)}{P(y)}\int_0^{y}z\left(-\lambda'(z)\right)dz\right)+O\left(\lambda(y)\frac{yp(y)}{P(y)t}\right), & \text{для}\quad t>\frac{1}{y}.\end{cases}$$

Доведення. Інтегруючи частинами, маємо

$$K(y,t)=\frac{\lambda(y)}{P(y)}S(y,y,t)-\frac{1}{P(y)}\int_0^{y}S(y,z,t)\lambda'(z)dz,$$

звідки за лемою 3 отримуємо для $0<t\le\frac{1}{y}$

$$K(y,t)=O\left(\frac{y^2p(y)}{P(y)}\lambda(y)\right)+O\left(\frac{1}{P(y)}\int_0^{y}z^2p(y)\left(-\lambda'(z)\right)dz\right)=$$

$$=O\left(y\lambda(y)\right)+O\left(\frac{p(y)}{P(y)}\int_0^{y}z^2p(y)\left(-\lambda'(z)\right)dz\right)$$

Для $\frac{1}{y}<t$ за лемою 3

$$K(y,t)=O\left(\frac{\lambda(y)yp(y)}{P(y)t}\right)+O\left(\frac{1}{P(y)}\int_0^{y}\frac{zp(y)}{t}\left(-\lambda'(z)\right)dz\right)=$$

$$=O\left(\lambda(y)\frac{yp(y)}{tP(y)}\right)+O\left(\frac{p(y)}{tP(y)}\int_0^{y}z\left(-\lambda'(z)\right)dz\right).$$

Лема 5. *Якщо* $\lambda(y)$ *задовольняє умовам теореми, то*

$$\int_0^\infty \ln(y+1)\lambda'(y)dy < \infty.$$

Доведення. Інтегруючи частинами, маємо

$$\int_0^A \lambda'(y)\ln(y+1)dy = \ln(A+1)\lambda(A) - \int_0^A \frac{\lambda(y)}{y+1}dy.$$

Але $\lambda(A)\ln(A+1) = O(1)$, коли $A\to\infty$, тоді

$$\int_0^A \lambda'(y)\ln(y+1)dy = O(1), \text{ коли } A\to\infty.$$

Доведення теореми. Ми маємо $\tau'(y) = \frac{1}{P(y)}\int_0^y P(y-u)\lambda(u)A(u,x)dx.$

За лемою 1 $\tau'(y) = \frac{p(y)}{P^2(y)}\int_0^y p(y-u)\left[\frac{P(y)}{p(y)} - \frac{P(y-u)}{p(y-u)}\right]\lambda(u)A(u,x)du,$

де $A(u,x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \varphi(t)\cos utdt.$

$$\int_0^\infty |\tau'(y)| \le \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{p(y)}{P(y)}dy\int_0^y p(y-u)\left|\left[\frac{P(y)}{p(y)} - \frac{P(y-u)}{p(y-u)}\right]\lambda(u)du\int_0^\infty \varphi(t)\cos utdt\right| =$$

$$= \int_0^\infty \frac{p(y)}{P(y)}dy\int_0^\infty |\varphi(t)||K(y,t)|dt = \int_0^\infty \frac{p(y)}{P(y)}dy\int_0^{\frac{1}{y}} |\varphi(t)||K(y,t)|dt +$$

$$+ \int_0^\infty \frac{p(y)}{P(y)}dy\int_{\frac{1}{y}}^\infty |\varphi(t)||K(y,t)|dt = I_1 + I_2.$$

Оцінимо кожний із інтегралів I_1, I_2. За лемою 4 та умовою теореми маємо

$$I_1 = O\left(\int_0^\infty \frac{p(y)}{P(y)}dy\int_0^{\frac{1}{y}} |\varphi(t)|dt\frac{p(y)}{P(y)}\int_0^y z^2(-\lambda'(z))dz\right) +$$

$$+ O\left(\int_0^\infty \frac{p(y)}{P(y)}dy\int_0^{\frac{1}{y}} |\varphi(t)|y\lambda(y)dt\right) =$$

$$= O\left(\int_0^\infty \frac{p^2(y)}{yP^2(y)}dy\int_0^y z^2(-\lambda'(z))dz\right) + O\left(\int_0^\infty \frac{p(y)}{P(y)}dy\frac{1}{y}y\lambda(y)dy\right) =$$

$$=O\left(\int_0^\infty \frac{dy}{y^3}\int_0^y z^2\left(-\lambda'(z)\right)dz\right)+O\left(\int_0^\infty \frac{\lambda(y)}{y+1}dy\right)=$$

$$=O\left(\int_0^\infty z^2\left(-\lambda'(z)\right)dz\int_z^\infty \frac{dy}{y^3}\right)+O(1)=$$

$$=O\left(\int_0^\infty \left(-\lambda'(z)\right)dz\right)+O(1)=O(1).$$

За лемою 4

$$I_2=O\left(\int_0^\infty \frac{p(y)}{P(y)}dy\int_{\frac{1}{y}}^\infty |\varphi(t)|\frac{p(y)dt}{P(y)t}\int_0^y z^2\left(-\lambda'(z)\right)dz\right)+$$

$$+O\left(\int_0^\infty \frac{p(y)}{P(y)}dy\int_{\frac{1}{y}}^\infty |\varphi(t)|\lambda(y)\frac{yp(y)}{P(y)t}dt\right)=$$

$$=O\left(\int_0^\infty \frac{p^2(y)}{P^2(y)}dy\int_0^y z\left(-\lambda'(z)\right)dz\int_{\frac{1}{y}}^\infty \frac{|\varphi(t)|}{t}dt\right)+$$

$$+O\left(\int_0^\infty \frac{yp^2(y)}{P^2(y)}\lambda(y)dy\int_{\frac{1}{y}}^\infty \frac{|\varphi(t)|}{t}dt\right)=$$

$$=O\left(\int_0^\infty \frac{\ln(1+y)}{y^2}dy\int_0^y z\left(-\lambda'(z)\right)dz\right)+O\left(\int_0^\infty \frac{\lambda(y)}{y}\ln(1+y)dy\right)=$$

$$=O\left(\int_0^\infty z\left(-\lambda'(z)\right)dz\int_z^\infty \frac{\ln(1+y)}{y^2}dy\right)+O(1).$$

Двічі інтегруючи частинами, отримуємо

$$\int_z^\infty \frac{\ln(1+y)}{y^2}dy=\frac{\ln(1+z)}{z}+\frac{1}{z},$$

так що

$$I_2=O\left(\int_0^\infty \ln(1+z)\left(-\lambda'(z)\right)dz\right)+O\left(\int_0^\infty \left(-\lambda'(z)\right)dz\right)+O(1)=O(1)$$

за лемою 5.

Це завершує доведення теореми.

Наслідок. Нехай функція $\lambda(y)$ задовольняє умовам теореми. Якщо $\int_0^t |\varphi(t)|dt=O(t)$, $t\to 0$, тоді інтеграл $\int_0^\infty \lambda(y)A(y,x)dy$ підсумовується $|C,\alpha|$, $\alpha>1$.

Бібліографічні посилання

1. **Вороной Г.Ф.** Расширение понятия о пределе суммы членов бесконечного ряда // Собр. соч.: В 3 т.– К., 1952. – Т.3. – С.9 –10.
2. **Титчмарш Е.** Введение в теорию интеграла Фурье. – М., 1948. – 453 с.

Надійшла до редколегії 17.11.07